Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas III (MA1116)
1er Examen Parcial (30 %)
Abr-Jul 2018

Turno 3-4
Duración: 1 hora 50 minutos

Respuestas

Pregunta 1. (11 ptos.) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} \beta x + y + z &= 1 \\ x + \beta y + z &= 1 \\ x + y + \beta z &= 1 \end{aligned}$$

Halle los valores de β para que el sistema sea:

a. Consistente con infinitas soluciones. Halle estas soluciones.

b. Inconsistente.

c. Consistente con solución única.

Solución: Escribimos la matriz aumenta del sistema y le aplicamos operaciones elementales de fila para obtener la siguiente matriz equivalente.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \beta & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \beta & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \beta & 1 \\ 0 & \beta-1 & 1-\beta & 0 \\ 0 & 0 & (\beta+2)(1-\beta) & 1-\beta \end{array}\right)$$

El sistema tiene infinitas soluciones si $(\beta+2)(1-\beta) = 0$ y $1-\beta = 0$; es decir, si $\beta = 1$. En tal caso, la matriz aumentada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

cuyas soluciones son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\mu-\nu \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con } \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

El sistema es inconsistente si $(\beta+2)(1-\beta)=0$ y $1-\beta\neq 0$; es decir, si $\beta=-2$.

El sistema tiene solución única si $(\beta+2)(1-\beta)\neq 0$; es decir, si $\beta\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$.

Pregunta 2. (6 ptos.) Sean A, B y C matrices 4×4, con $|A|=\frac{1}{2}$ y

$$C=\begin{pmatrix}-1&0&1&3\\2&8&1&-1\\1&0&1&1\\1&0&2&1\end{pmatrix}$$

a. Calcule $|C|$

b. Si $\left(CAB^{-1}\right)^{\mathrm{T}}B^{-1}=\mathrm{I}$, halle los posibles valores de $|B|$.

Solución:

$$|C|=\begin{vmatrix}-1&0&1&3\\2&8&1&-1\\1&0&1&1\\1&0&2&1\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}-1&1&3\\1&1&1\\1&2&1\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}-1&1&3\\1&1&1\\0&1&0\end{vmatrix}$$

$$=-8\begin{vmatrix}-1&3\\1&1\end{vmatrix}=(-8)(-4)=32$$

Pregunta 3. (9 ptos.) Sea la matriz

$$D=\begin{pmatrix}t&0&2\\2t&t-1&4\\-t&t-1&t+1\end{pmatrix}$$

a. ¿Para cuáles valores del parámetro t es la matriz D singular?

b. Halle $\left|D^{-1}\right|$ para $t=2$.

c. Halle D^{-1}.

Solución: Como $\left|D\right| = t(t+3)(t-1)$, la matriz D es singular para $t \in \{-3, 0, 1\}$ ya que esos son los únicos valores para los cuales $\left|D\right| = 0$.

Si $t = 2$ tenemos que $\left|D\right| = 10$ y entonces $\left|D^{-1}\right| = \frac{1}{10}$ para $t = 2$.

Para que D sea invertible es necesario que $t \notin \{-3, 0, 1\}$. Luego, o bien aplicando el método de Jordan o bien a través del cálculo de la matriz adjunta, la inversa viene dada por

$$\begin{pmatrix} \dfrac{t-3}{t(t+3)} & \dfrac{2}{t(t+3)} & \dfrac{-2}{t(t+3)} \\[2ex] \dfrac{-2}{t-1} & \dfrac{1}{t-1} & 0 \\[2ex] \dfrac{3}{t+3} & \dfrac{-1}{t+3} & \dfrac{1}{t+3} \end{pmatrix}$$

siempre que $t \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 1\}$.

Pregunta 4. (4 ptos.) Para cada una de las siguientes afirmaciones determine si son verdaderas o falsas:

a. $\begin{vmatrix} 6 & 9 & 2 \\ 5 & 0 & 10 \\ 4 & 8 & -8 \end{vmatrix} = 60 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

b. Si A es una matriz 2×2 cualquiera entonces $\operatorname{adj}\big(\operatorname{adj}(A)\big) = A$.

Solución:

a. La afirmación es falsa ya que

$$\begin{vmatrix} 6 & 9 & 2 \\ 5 & 0 & 10 \\ 4 & 8 & -8 \end{vmatrix} = (3)(5)(4) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -60 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

pero

$$-60 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 60 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \iff \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

y

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

b. La afirmación es verdadera ya que si escribimos $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces $\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ y, repitiendo el proceso, tenemos que $\operatorname{adj}\big(\operatorname{adj}(A)\big) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$.